6.6 Postačujúce podmienky pre extrém

Nech $x = x(t, C)$ je poľom extremál. Ak každým bodom roviny (t, x) nejakej oblasti D prechádza iba jedna krivka sústavy kriviek $x = x(t, C)$, potom hovoríme, že táto sústava kriviek v oblasti D tvorí **vlastné pole.**

Smernica dotyčnice $p(t, x)$ ku krivke sústavy $x = x(t, C)$ prechádzajúcej bodom (t, x), sa nazýva smerom uvažovaného poľa v bode (t, x). Napríklad pre sústavu kriviek $x = x(t, C) = 5t + C$ v oblasti $t^2 + x^2 \le 1$ je $p(t, x) = 5$ a systém $x = x(t, C)$ tvorí vlastné pole. Ak všetky krivky sústavy kriviek $x = x(t, C)$ prechádzajú cez nejaký bod (t_0, x_0), t.j. tvoria zväzok kriviek a bod $(t_0, x_0) \in D$, potom táto sústava kriviek netvorí pole. Ak však okrem bodu $(t_0, x_0) \in D$ sa tieto krivky nepretínajú v ďalšom bode oblasti D, potom hovoríme, že tvoria **centrálne pole**.

Napríklad zväzok kriviek $x = C \sin t$ tvorí:

- vlastné pole pre $t \in \langle 1,2 \rangle$,
- centrálne pole pre $t \in \langle 0,2 \rangle$,
- netvorí pole pre $t \in \langle 0,4 \rangle$.

Ak je vlastné alebo centrálne pole vytvorené systémom extremál niektorej variačnej úlohy, potom toto pole nazývame **poľom extremál**.

Nech krivka $x = x(t)$ je extremálou funkcionálu

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt$$

a splňuje okrajové podmienky $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$. Krivku $x = x(t)$ možno včleniť do poľa extremál:

a) Ak nájdená sústava extremál $x = x(t, C)$ tvorí pole a existuje C_0 také, že $x = x(t, C_0)$ nemá spoločné body s hranicou oblasti D v ktorej sústava $x = x(t, C)$ tvorí pole s výnimkou bodov A a B.
b) Ak zväzok extremál so stredom v bode A v okolí extremály $x = x(t)$ prechádzajúcej cez ten istý bod tvorí pole, potom týmto spôsobom sme našli centrálne pole, ktoré obsahuje danú extremálu $x = x(t)$.

Za parameter sústavy v tomto prípade môžeme zobrať smernicu dotyčnice ku krivke zväzku v bode $A = (t_0, x_0)$.

Príklad 6.6.1 *Je daný funkcionál*

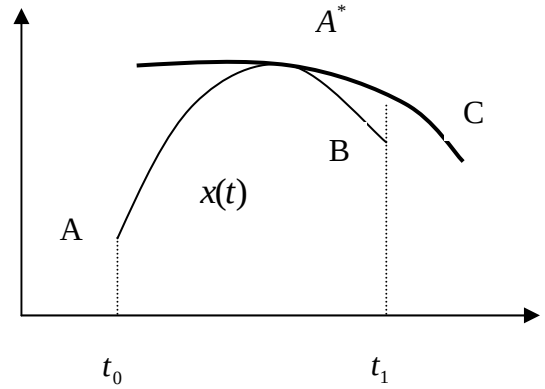
$$v[x(t)] = \int_0^a (x'^2 - x^2)dt .$$

Úlohou je včleniť oblúk extremály $x = 0$ *spájajúci body* $(0,0), (a,0)$, *kde* $0 < a < \pi$, *do centrálneho poľa extremál.*

Riešenie: Všeobecné riešenie odpovedajúcej Eulerovej rovnice $x'' + x = 0$ je $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Z podmienky $x(0) = 0$ vyplýva $C_1 = 0$. Potom sústava kriviek $x = C_2 \sin t$ na intervale $\langle 0, a \rangle$ tvorí centrálne pole, ktoré obsahuje v sebe pre $C_2 = 0$ extremálu $x = 0$. Parameter tejto sústavy C_2 je rovný hodnote x_t' v bode $(0,0)$.

Je známe, že dve nekonečne blízke krivky sústavy $F(t, x, C) = 0$ sa pretínajú v tzv. C - diskriminantnej krivke určenej rovnicami

$$F(t, x, C) = 0, \quad \frac{\partial F(t, x, C)}{\partial C} = 0.$$



Ak $F(t, x, C) = 0$ je rovnicou sústavy kriviek, potom stred zväzku je bodom C - diskriminantnej krivky.

Ak oblúk $A\overset{\frown}{B}$ extremály $x = x(t)$ má okrem bodu A aj spoločný bod A^* s C - diskriminantnou krivkou zväzku $x = x(t, C)$, potom blízke krivky ku krivke $x = x(t)$ zväzku vo všeobecnosti tvoria pole extremál. Získaný výsledok možno v stručnosti s formulovať takto:

Pre konštrukciu centrálneho poľa extremál so stredom v bode A obsahujúceho oblúk extremály $A\overset{\frown}{B}$ je postačujúce, aby bod A^* neležal na oblúku $A\overset{\frown}{B}$.

Táto podmienka pre zostrojenie poľa extremál obsahujúceho extremálu sa nazýva **Jacobiho podmienkou**.

Analyticky sa dá sformulovať táto podmienka nasledovne: Nech $x = x(t, C)$ je rovnica zväzku extremál so stredom v bode A, pričom parameter C môže byť totožný s x' extremál zväzku v bode A.

C - diskriminantná krivka je určená rovnicami

$$x = x(t, C), \quad \frac{\partial x(t, C)}{\partial C} = 0.$$

Pozdĺž každej pevnej krivky sústavy je derivácia $\frac{\partial x(t, C)}{\partial C}$ iba funkciou premennej t.

Funkcia $x = x(t, C)$ je riešením Eulerovej rovnice, teda

$$F_x[t, x(t, C), x_t(t, C)] - \frac{d}{dt} F_{x'}[t, x(t, C), x_t(t, C)] \equiv 0.$$

Derivovaním podľa C a zavedením označenia $u = \frac{\partial x(t, C)}{\partial C}$ dostávame

$$F_{xx} u + F_{xx'} u' - \frac{d}{dt}(F_{xx'} u + F_{x'x'} u') = 0$$

alebo

$$(F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'})u - \frac{d}{dt}(F_{x'x'}u') = 0. \qquad (6.6.1)$$

$F_{xx}(t,x,x'), F_{xx'}(t,x,x'), F_{x'x'}(t,x,x')$ sú známe funkcie premennej t, pretože $x = x(t,C)$ je odpovedajúca extremála $A\overset{\frown}{B}$ pre $C = C_0$.

Diferenciálnu rovnicu (6.6.1)nazývame **Jacobiho rovnicou**.

Ak riešenie tejto rovnice u rovné nule pre $t = t_0$, je rovné nule ešte v nejakom inom bode intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$, potom konjugovaný bod k bodu A určený rovnicami

$$x = x(t, C_0),\ u = \frac{\partial x(t,C)}{\partial C}|_{C=C_0} \text{ alebo } u = 0$$

leží na oblúku $A\overset{\frown}{B}$.

Ak neexistuje ďalší nulový bod riešenia u Jacobiho rovnice pre $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$, potom v tomto intervale neexistuje konjugovaný bod k bodu A pre $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ a extremálu $A\overset{\frown}{B}$ môžeme včleniť do centrálneho poľa extremál so stredom v bode A.

Príklad 6.6.2 *Zistime, či je splnená Jacobiho podmienka pre extremály funkcionálu*

$$v[x(t)] = \int_0^1 (x'^2 - x^2)dt,$$

pričom $x(0) = 0, x(1) = 0$.

Riešenie: Odpovedajúca Jacobiho rovnica má tvar

$$-2u - \frac{d}{dt}(2u') = 0$$

alebo

$$u'' + u = 0.$$

Jej všeobecným riešením je

$$u(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Pretože $u(0) = 0$ je $C_1 = 0$, čiže $u(t) = C_2 \sin t$. Funkcia u nadobúda nulové hodnoty pre $t = k\pi$, kde k je celé číslo. To znamená, že funkcia u má na intervale $\langle 0,1 \rangle$ jediný nulový bod v bode $t = 0$, čiže je splnená Jacobiho podmienka.

Riešenie pomocou MAPLu:

```
> with(VariationalCalculus);
```

[*ConjugateEquation* , *Convex*, *EulerLagrange*, *Jacobi*, *Weierstrass*]

> **Jacobi(diff(x(t),t)^2-x(t)^2,t,x(t),sin(t),u,0);**

$$-2\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{u}(t)\right) - 2\,\mathrm{u}(t),\ \mathrm{u}(t) = _C1\ \sin(t)$$

Ďalší nulový bod je

> **x2:=fsolve(sin(t)=0,t, 0..3.5);**

$$x2 := 3.141592654$$

6.6.1. Weierstrassova funkcia

Nech pre funkcionál

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt$$

pri okrajových podmienkach

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$$

je splnená Jacobiho podmienka a extremála $C = A\bar{B}$, $A = (t_0, x_0)$, $B = (t_1, x_1)$ môže byť včlenená do poľa extremál daného funkcionálu. Označme $p = p(t, x)$ smernicu dotyčnice krivky tohoto poľa prechádzajúcej bodom (t, x) v tomto bode.

Pre určenie znamienka prírastku Δv funkcionálu v pri prechode od extremály C ku niektorej blízkej prípustnej extremále $\overline{C}$, môžeme prírastok vyjadriť takto

$$\Delta v = \int_{\overline{C}} F[t, x, x']dt - \int_{C} F[t, x, x']dt,$$

kde integrovanie po krivke $\overline{C}$, resp. C znamená, že uvažujeme o hodnotách daného funkcionálu na uvedených krivkách.

Uvažujme pomocný funkcionál

$$\int_{\overline{C}} \left(F[t, x, x'] + (x' - p)F_p[t, x, p]\right)dt,$$

prírastok Δv funkcionálu v môžeme vyjadriť (integráciou a vzhľadom na Eulerovu rovnicu) v tvare

$$\Delta v = \int_{\overline{C}} F[t, x, x']dt - \int_{\overline{C}} (F[t, x, p] + (x' - p)F_p[t, x, p])dt =$$
$$= \int_{\overline{C}} (F[t, x, x'] - F[t, x, p] - (x' - p)F_p[t, x, p])dt.$$

Funkciu

$$E[t,x,x',p]=F[t,x,x']-F[t,x,p]-(x'-p)F_p[t,x,p]$$

nazývame **Weierstrassovou funkciou** daného funkcionálu v.

Platí nasledujúca veta:

Veta 6.6.1 *Postačujúcou podmienkou pre to, aby funkcionál*

$$v[x(t)]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x,x')dt$$

pri okrajových podmienkach $x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1$ *nadobudol minimum(maximum) na extremále* C, *pre ktorú je splnená Jacobiho podmienka, je*

$$E(t,x,p,x')\geq 0, \quad (E(t,x,p,x')\leq 0).$$

Budeme rozoznávať slabé a silné extrémy funkcionálov.

Funkcionál v nadobúda na extremále C **slabé minimum** (**maximum**), ak nerovnosť $E(t,x,p,x')\geq 0, \quad (E(t,x,p,x')\leq 0)$ je splnená v bodoch (t,x) blízkych ku extremále C a pre hodnoty x' blízke ku $p(t,x)$ na krivke C.

Funkcionál v nadobúda na extremále C **silné minimum** (**maximum**), ak nerovnosť $E(t,x,p,x')\geq 0, \quad (E(t,x,p,x')\leq 0)$ je splnená v bodoch (t,x) blízkych ku extremále C a pre ľubovoľné hodnoty x'.

Príklad 6.6.3 *Vyšetrime extrémy funkcionálu*

$$v[x(t)]=\int_0^a x'^3 dt \ , \ x(0)=0, x(a)=b, \quad a>0, b>0 \ .$$

Riešenie: Eulerova rovnica daného funkcionálu $-\frac{d}{dt}(3x'^2)=0$ má všeobecné riešenie $x=C_1t+C_2$. Vzhľadom na dané okrajové podmienky môže nastať extrém len na krivke $x=\frac{b}{a}t$. Zväzok priamok $x=C_1t$ so stredom v bode $A=(0,0)$ tvorí centrálne pole so stredom v bode A pričom obsahuje extremálu $x=\frac{b}{a}t$.

```
> dsolve({3*diff(diff(x(t),t)^2,t) = 0},[x(t)]);
                    [ { x(t) = _C1 } ], [ { x(t) = _C1 t + _C2 } ]
```

Odpovedajúca funkcia E má tvar

$$E(t,x,p,x')=x'^3-p^3-3p^2(x'-p)=(x'-p)^2(x'+2p).$$

Riešenie pomocou MAPLu:
> **with(VariationalCalculus);**

> **Weierstrass(diff(x(t),t)^3,t,x(t),p);**

$$\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^3 - {p_1}^3 - 3\left(\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right) - p_1\right){p_1}^2$$

Na extremálach je $p = \frac{b}{a} > 0$. Výraz $x' + 2p$ zachováva znamienko pre x' blízke ku p, teda na týchto blízkych krivkách je $E \geq 0$ a funkcionál nadobúda na extremále $x = \frac{b}{a}t$ slabé minimum. Podmienky pre silné minimum nie sú splnené.

6.6.2. Légendreova podmienka

Pri vyšetrovaní znamienka Weierstrassovej funkcie sa stretávame so značnými problémami už pri riešení jednoduchých funkcionálov. Uvedieme ľahšie kontrolovateľné podmienky.

Predpokladajme, že funkcia $F(t,x,x')$ je tri krát diferencovateľná podľa x'. Funkciu $F(t,x,x')$ môžeme v bodoch (t,x) pre x' dostatočne blízke hodnotám na extremále vyjadriť podľa Taylorovej vety v tvare

$$F(t,x,x') = F(t,x,p) + (x'-p)F_{x'}(t,x,p) + \frac{1}{2!}(x'-p)^2 F_{x'x'}(t,x,q)$$

kde q leží medzi x' a p. Po dosadení do Weierstrassovej funkcie a úprave dostávame

$$E(t,x,p,x') = \frac{1}{2!}(x'-p)^2 F_{x'x'}(t,x,q).$$

Vidíme, že funkcia E zachováva znamienko, $signE = signF_{x'x'}(t,x,g)$. Platí veta:

Veta 6.6.2 (Légendreova podmienka.) *Nech C je extremála funkcionálu*

$$v[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t,x,x')dt$$

pri okrajových podmienkach $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ a nech je splnená Jacobiho podmienka. Ak v bodoch blízkych k bodom krivky C platí

$$F_{x'x'}(t,x,q) \geq 0 \quad (F_{x'x'}(t,x,q) \leq 0)$$

pre ľubovoľné q, potom funkcionál v nadobúda na extremále C silné minimum (maximum).

Ak v bodoch extremály C platí $F_{x'x'}(t,x,q) > 0$ $(F_{x'x'}(t,x,q) < 0)$ pre hodnoty q blízke hodnotám p na extremále, nadobúda daný funkcionál na extremále C slabé minimum (maximum).